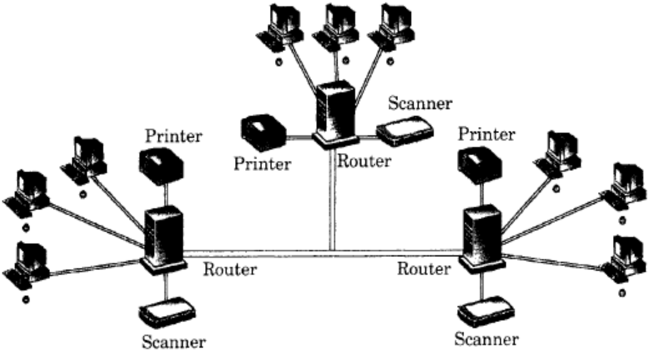
Introdução à Teoria de Grafos

22 de março de 2021

Introdução

Por que estudar grafos? Porque são:

- Importante ferramenta matemática com aplicação em diversas áreas do conhecimento;
- Existem centenas de problemas computacionais que empregam grafos com sucesso.


Scanner
Printer
Printer
Router
Printer
Router
Router
Scanner
Scanner

Conceitos Básicos

Grafo não orientado

é um par $G = (V, E)$ que consiste de:

- um conjunto finito, não vazio V, cujos elementos são designados por vértices;
- um conjunto E de pares não ordenados de elementos de V designados por arestas.

Conceitos Básicos

Grafo não orientado

é um par $G = (V, E)$ que consiste de:

- um conjunto finito, não vazio V, cujos elementos são designados por vértices;
- um conjunto E de pares não ordenados de elementos de V designados por arestas.

Conceitos Básicos

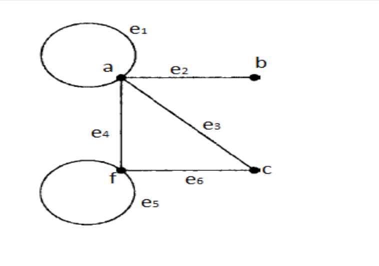
Grafo não orientado

é um par $G = (V, E)$ que consiste de:

- um conjunto finito, não vazio V, cujos elementos são designados por vértices;
- um conjunto E de pares não ordenados de elementos de V designados por arestas.

Conceitos Básicos

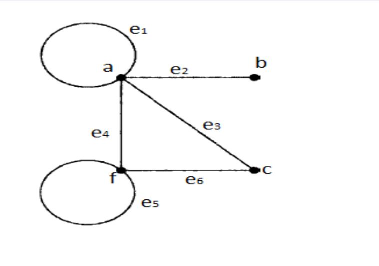
Exemplo 1. Considere o grafo G



$$
\begin{aligned}
V(G) &= \{a, b, c, f\} \\
E(G) &= \{\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, f\}, \{f, f\}, \{f, c\}\} \\
&= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}
\end{aligned}
$$

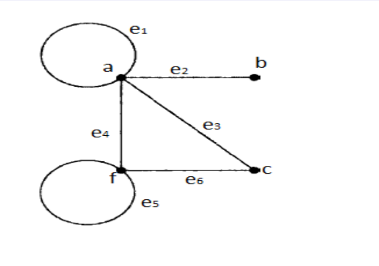
Conceitos Básicos

Exemplo 1. Considere o grafo G



$$
\begin{aligned}
V(G) &= \{a, b, c, f\} \\
E(G) &= \{\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, f\}, \{f, f\}, \{f, c\}\} \\
&= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1. Considere o grafo G



$$
\begin{aligned}
V(G) &= \{a, b, c, f\} \\
E(G) &= \{\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, f\}, \{f, f\}, \{f, c\}\} \\
&= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}
\end{aligned}
$$

Conceitos Básicos

Grafo orientado ou digrafo

é um par $G = (V, E)$ que consiste de:

- um conjunto finito, não vazio V, cujos elementos são designados por vértices;
- um conjunto E de pares ordenados de elementos de V designados por arestas.

Conceitos Básicos

Grafo orientado ou digrafo

é um par $G = (V, E)$ que consiste de:

- um conjunto finito, não vazio V, cujos elementos são designados por vértices;
- um conjunto E de pares ordenados de elementos de V designados por arestas.

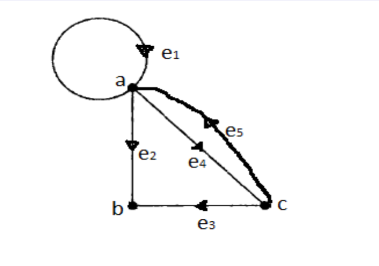
Conceitos Básicos

Grafo orientado ou digrafo

é um par $G = (V, E)$ que consiste de:

- um conjunto finito, não vazio V, cujos elementos são designados por vértices;
- um conjunto E de pares ordenados de elementos de V designados por arestas.

Exemplo 2. Considere o grafo G



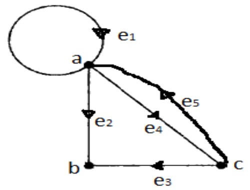
$$\begin{aligned} V(G) &= \{a, b, c\} \\ E(G) &= \{(a, a), (a, b), (c, b), (a, c), (c, a)\} \\ &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} \end{aligned}$$

Conceitos Básicos

Conceitos Básicos

- uma aresta é incidente nos seus vértices extremos, os quais por esse motivo, se dizem adjacentes;
- Duas arestas com mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas;
- Uma aresta com extremidades no mesmo vértice, ou seja, $e = vv$, diz-se laço.

Exemplo 3.

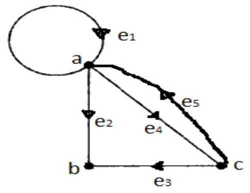


- todos os vértices são adjacentes;
- e_1 é um laço;
- e_4 e e_5 são arestas paralelas;

Conceitos Básicos

- uma aresta é incidente nos seus vértices extremos, os quais por esse motivo, se dizem adjacentes;
- Duas arestas com mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas;
- Uma aresta com extremidades no mesmo vértice, ou seja, $e = vv$, diz-se laço.

Exemplo 3.



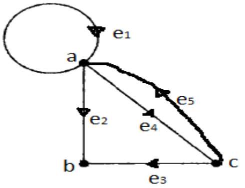
- todos os vértices são adjacentes;
- e_1 é um laço;
- e_4 e e_5 são arestas paralelas;

Conceitos Básicos

Conceitos Básicos

- uma aresta é incidente nos seus vértices extremos, os quais por esse motivo, se dizem adjacentes;
- Duas arestas com mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas;
- Uma aresta com extremidades no mesmo vértice, ou seja, $e = vv$, diz-se laço.

Exemplo 3.

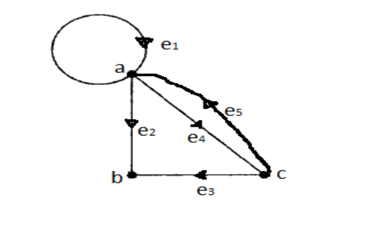


- todos os vértices são adjacentes;
- e_1 é um laço;
- e_4 e e_5 são arestas paralelas;

Conceitos Básicos

- uma aresta é incidente nos seus vértices extremos, os quais por esse motivo, se dizem adjacentes;
- Duas arestas com mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas;
- Uma aresta com extremidades no mesmo vértice, ou seja, $e = vv$, diz-se laço.

Exemplo 3.



- todos os vértices são adjacentes;
- e_1 é um laço;
- e_4 e e_5 são arestas paralelas;

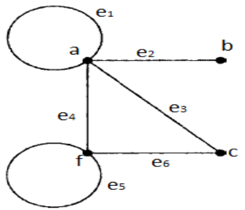
Grau de um vértice

Seja G um grafo e um vértice v de G.

Grau de v

denominado $d_G(v)$ ou simplesmente $d(v)$, é o número de arestas que são incidentes em v, sendo que a aresta que seja um laço conta duas vezes.

Exemplo 4.



- $d(a) = 5$;
- $d(b) = 1$;
- $d(c) = 2$;
- $d(f) = 4$.

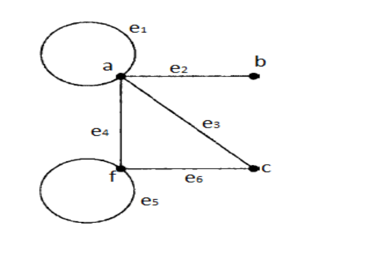
Grau de um vértice

Seja G um grafo e um vértice v de G.

Grau de v

denominado $d_G(v)$ ou simplesmente $d(v)$, é o número de arestas que são incidentes em v, sendo que a aresta que seja um laço conta duas vezes.

Exemplo 4.



- $d(a) = 5$;
- $d(b) = 1$;
- $d(c) = 2$;
- $d(f) = 4$.

Grau de um vértice

Observação:

Em um grafo orientado, podemos falar do grau de entrada (indeg) e do grau de saída (outdeg). E

$$d(v) = \text{indeg}(v) + \text{outdeg}(v).$$

Considere um grafo G.

Teorema

A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Grau de um vértice

Observação:

Em um grafo orientado, podemos falar do grau de entrada (indeg) e do grau de saída (outdeg). E

$$d(v) = \text{indeg}(v) + \text{outdeg}(v).$$

Considere um grafo G.

Teorema

A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Grau de um vértice

Observação:

Em um grafo orientado, podemos falar do grau de entrada (indeg) e do grau de saída (outdeg). E

$$d(v) = \text{indeg}(v) + \text{outdeg}(v).$$

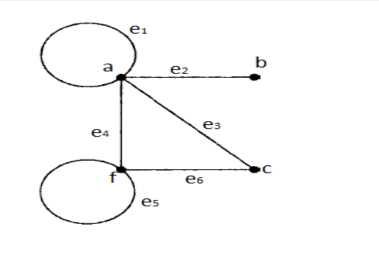
Considere um grafo G.

Teorema

A soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

Exemplo 5. Considere o grafo G



- $d(a) = 5,\ d(b) = 1,\ d(c) = 2$ e $d(f) = 4.$
- $d(a) + d(b) + d(c) + d(f) = 5 + 1 + 2 + 4 = 12 = 2 \cdot \underbrace{6}_{=|E(G)|}$

Corolário. Num grafo arbitrário G, o número de vértices de grau ímpar é par.

Considere um grafo com n vértices, dos quais m são de grau par e $n-m$ de grau ímpar. Verifica-se a identidade

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E|,$$

i.e.,

$$\sum_{k=1}^{m} d(v_k) + \sum_{j=1}^{n-m} d(v_j) \text{ é par}$$

O primeiro somatório é soma de números pares, portanto é par. Deste modo, $\sum_{j=1}^{n-m} d(v_j)$ também é par. Pelo facto de $\sum_{j=1}^{n-m} d(v_j)$ ser soma de números ímpares, concluimos que $n-m$ é par.

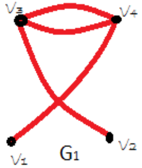
Exemplo 6. É possível ter um grafo com vértices de graus 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, e 6?

Resposta: Não. $\sum_{i=1}^{10} d(v_i)$ é ímpar.

Exemplo 7. É possível ter um grafo com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3?

Resposta: Sim. Suponhamos que $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 1$, $d(v_3) = 3$ e $d(v_4) = 3$.

$$\sum_{i=1}^{4} d(v_i) = 2 \cdot 4.$$



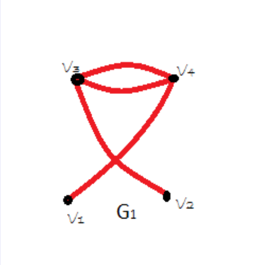
Exemplo 6. É possível ter um grafo com vértices de graus 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, e 6?

Resposta: Não. $\sum_{i=1}^{10} d(v_i)$ é ímpar.

Exemplo 7. É possível ter um grafo com quatro vértices de graus 1, 1, 3, e 3?

Resposta: Sim. Suponhamos que $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 1$, $d(v_3) = 3$ e $d(v_4) = 3$.

$$\sum_{i=1}^{4} d(v_i) = 2 \cdot 4.$$

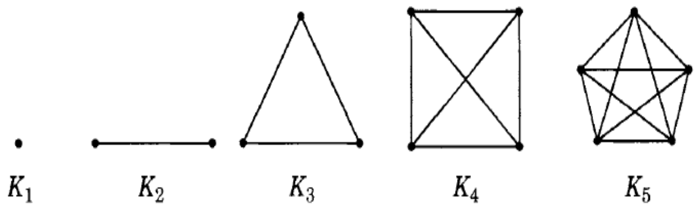


Grafos Especiais

Grafos Especiais

- **Grafo Simples** é um grafo que não tem laços nem arestas paralelas;
- **Grafo Nulo** é um grafo sem arestas.
- **Grafo Completo** com n vértices é um grafo simples em que todos os pares de vértices são adjacentes. Denotação: K_n.

Exemplo 8.

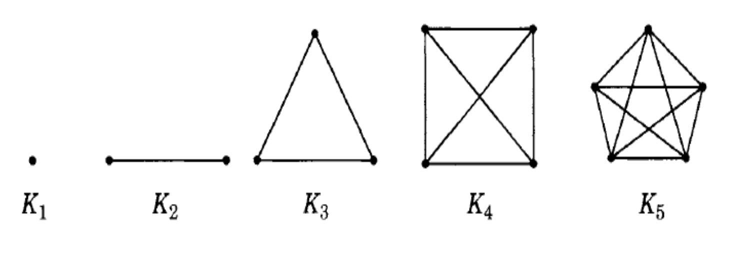


Grafos Especiais

Grafos Especiais

- **Grafo Simples** é um grafo que não tem laços nem arestas paralelas;
- **Grafo Nulo** é um grafo sem arestas.
- **Grafo Completo** com n vértices é um grafo simples em que todos os pares de vértices são adjacentes. Denotação: K_n.

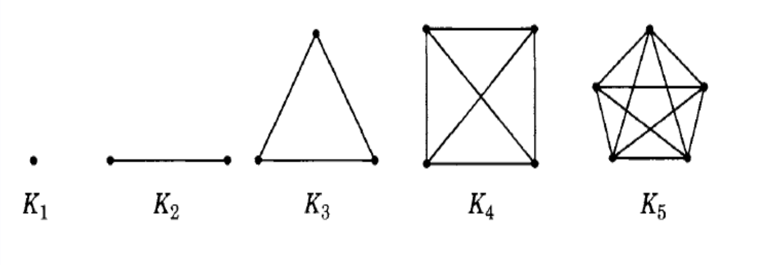
Exemplo 8.



Grafos Especiais

- **Grafo Simples** é um grafo que não tem laços nem arestas paralelas;
- **Grafo Nulo** é um grafo sem arestas.
- **Grafo Completo** com n vértices é um grafo simples em que todos os pares de vértices são adjacentes. Denotação: K_n.

Exemplo 8.

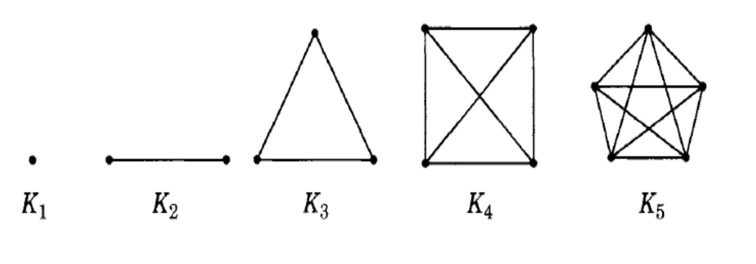


Grafos Especiais

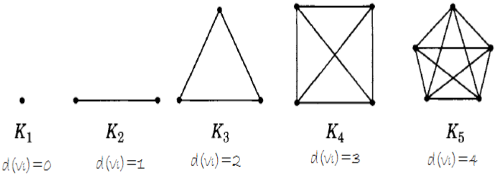
Grafos Especiais

- **Grafo Simples** é um grafo que não tem laços nem arestas paralelas;
- **Grafo Nulo** é um grafo sem arestas.
- **Grafo Completo** com n vértices é um grafo simples em que todos os pares de vértices são adjacentes. Denotação: K_n.

Exemplo 8.



Determinação de $|E(K_n)|$



K_n tem:

- n vértices;
- $d(v_i) = n - 1$, para todo o $v_i \in V(K_n)$;

Portanto,

$$2|E(K_n)| = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = n(n-1),$$

i.e,

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Grafos Especiais

Grafos Especiais

- **Grafo regular** é aquele em que todos os vértices têm mesmo grau. Se o grau for k, chamamos o grafo de k-regular.
- **Grafo bipartido** é aquele em que o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2, tal que cada aresta do grafo tem um extremo em V_1 e o outro em V_2.
- **Grafo Bipartido Completo** é um grafo bipartido com bipartição V_1 e V_2 em que cada vértice de V_1 é adjacente a cada um de todos os vértices de V_2. Denotação: $K_{m,n}$, onde $m = |V|$ e $n = |V_2|$.

Grafos Especiais

Grafos Especiais

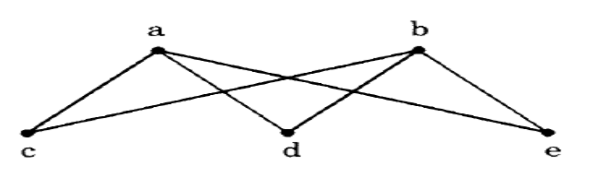
- **Grafo regular** é aquele em que todos os vértices têm mesmo grau. Se o grau for k, chamamos o grafo de k-regular.
- **Grafo bipartido** é aquele em que o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2, tal que cada aresta do grafo tem um extremo em V_1 e o outro em V_2.
- **Grafo Bipartido Completo** é um grafo bipartido com bipartição V_1 e V_2 em que cada vértice de V_1 é adjacente a cada um de todos os vértices de V_2. Denotação: $K_{m,n}$, onde $m = |V|$ e $n = |V_2|$.

Grafos Especiais

Grafos Especiais

- **Grafo regular** é aquele em que todos os vértices têm mesmo grau. Se o grau for k, chamamos o grafo de k-regular.
- **Grafo bipartido** é aquele em que o conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2, tal que cada aresta do grafo tem um extremo em V_1 e o outro em V_2.
- **Grafo Bipartido Completo** é um grafo bipartido com bipartição V_1 e V_2 em que cada vértice de V_1 é adjacente a cada um de todos os vértices de V_2. Denotação: $K_{m,n}$, onde $m = |V|$ e $n = |V_2|$.

Exemplo 9. Grafo bipartido completo $K_{2,3}$



- $V = \{a, b, c, d, e\}$
- $V_1 = \{a, b\}$;
- $V_2 = \{c, d, e\}$

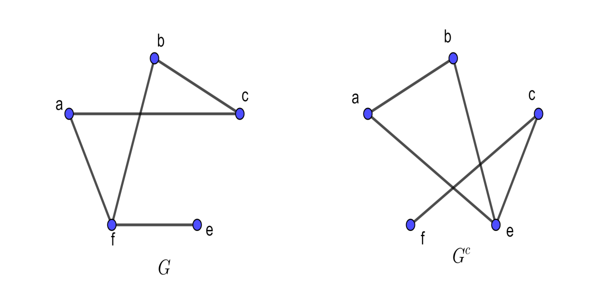
Grafos Especiais

Considere um grafo G simples.

Grafo Complementar de G

é o grafo simples denotado por G^c cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e no qual dois vértices são adjacentes sse não são adjacentes em G.

Exemplo 10. Grafos complementares



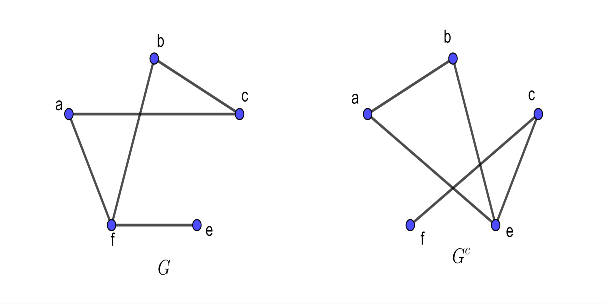
Grafos Especiais

Considere um grafo G simples.

Grafo Complementar de G

é o grafo simples denotado por G^c cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e no qual dois vértices são adjacentes sse não são adjacentes em G.

Exemplo 10. Grafos complementares

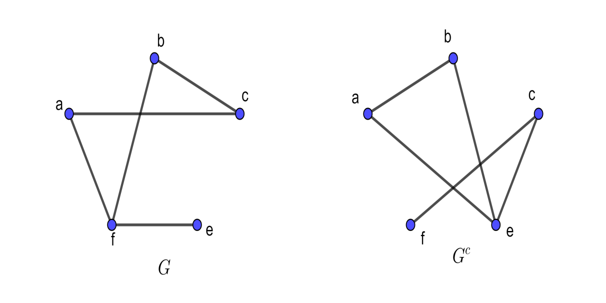


Considere um grafo G simples.

Grafo Complementar de G

é o grafo simples denotado por G^c cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e no qual dois vértices são adjacentes sse não são adjacentes em G.

Exemplo 10. Grafos complementares



Grafos Especiais

Relação entre G e G^c

Considere um grafo G simples. É válida a seguinte igualdade

$$|E(G)| + |E(G^c)| = |E(K_n)|, \tag{1}$$

onde $n = |V(G)|$.

Exemplo 11. Caracterize o K_n^c

K_n^c é um grafo nulo com n vértices.

Grafos Especiais

Relação entre G e G^c

Considere um grafo G simples. É válida a seguinte igualdade

$$|E(G)| + |E(G^c)| = |E(K_n)|, \tag{1}$$

onde $n = |V(G)|$.

Exemplo 11. Caracterize o K_n^c

K_n^c é um grafo nulo com n vértices.

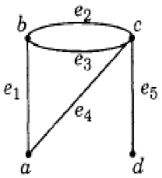
Representação Computacional

Considere um grafo $G = (\{v_1, \ldots, v_m\}, \{e_1, \ldots, e_n\})$.

Matriz de Adjacência

é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem m tal que a_{ij} é o número de arestas que unem os vértices v_i e v_j.

Exemplo 12.



$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

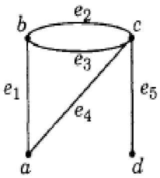
Representação Computacional

Considere um grafo $G = (\{v_1, \dots, v_m\}, \{e_1, \dots, e_n\})$.

Matriz de Adjacência

é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem m tal que a_{ij} é o número de arestas que unem os vértices v_i e v_j.

Exemplo 12.



$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observação 1. Seja A a matriz de adjacência de um grafo não orientado G.

- A matriz A é simétrica;
- Os elementos da diagonal principal de A são todos nulos sse, o grafo não possui laços;
- Se o grafo não possui laços, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha ou coluna correspondente.

Observação 2. Seja A a matriz de adjacência de um grafo orientado G.

- A matriz A não é necessariamente simétrica;
- O grau de saída do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da linha i;
- O grau de entrada do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da coluna i.

Representação Computacional

Observação 1. Seja A a matriz de adjacência de um grafo não orientado G.

- A matriz A é simétrica;
- Os elementos da diagonal principal de A são todos nulos sse, o grafo não possui laços;
- Se o grafo não possui laços, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha ou coluna correspondente.

Observação 2. Seja A a matriz de adjacência de um grafo orientado G.

- A matriz A não é necessariamente simétrica;
- O grau de saída do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da linha i;
- O grau de entrada do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da coluna i.

Representação Computacional

Observação 1. Seja A a matriz de adjacência de um grafo não orientado G.

- A matriz A é simétrica;
- Os elementos da diagonal principal de A são todos nulos sse, o grafo não possui laços;
- Se o grafo não possui laços, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha ou coluna correspondente.

Observação 2. Seja A a matriz de adjacência de um grafo orientado G.

- A matriz A não é necessariamente simétrica;
- O grau de saída do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da linha i;
- O grau de entrada do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da coluna i.

Representação Computacional

Observação 1. Seja A a matriz de adjacência de um grafo não orientado G.

- A matriz A é simétrica;
- Os elementos da diagonal principal de A são todos nulos sse, o grafo não possui laços;
- Se o grafo não possui laços, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha ou coluna correspondente.

Observação 2. Seja A a matriz de adjacência de um grafo orientado G.

- A matriz A não é necessariamente simétrica;
- O grau de saída do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da linha i;
- O grau de entrada do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da coluna i.

Representação Computacional

Observação 1. Seja A a matriz de adjacência de um grafo não orientado G.

- A matriz A é simétrica;
- Os elementos da diagonal principal de A são todos nulos sse, o grafo não possui laços;
- Se o grafo não possui laços, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha ou coluna correspondente.

Observação 2. Seja A a matriz de adjacência de um grafo orientado G.

- A matriz A não é necessariamente simétrica;
- O grau de saída do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da linha i;
- O grau de entrada do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da coluna i.

Representação Computacional

Observação 1. Seja A a matriz de adjacência de um grafo não orientado G.

- A matriz A é simétrica;
- Os elementos da diagonal principal de A são todos nulos sse, o grafo não possui laços;
- Se o grafo não possui laços, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha ou coluna correspondente.

Observação 2. Seja A a matriz de adjacência de um grafo orientado G.

- A matriz A não é necessariamente simétrica;
- O grau de saída do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da linha i;
- O grau de entrada do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da coluna i.

Observação 1. Seja A a matriz de adjacência de um grafo não orientado G.

- A matriz A é simétrica;
- Os elementos da diagonal principal de A são todos nulos sse, o grafo não possui laços;
- Se o grafo não possui laços, o grau de um vértice é dado pela soma dos elementos de sua linha ou coluna correspondente.

Observação 2. Seja A a matriz de adjacência de um grafo orientado G.

- A matriz A não é necessariamente simétrica;
- O grau de saída do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da linha i;
- O grau de entrada do vértice v_i é dado pela soma dos elementos da coluna i.

Considere um grafo $G = (\{v_1, \ldots, v_m\}, \{e_1, \ldots, e_n\})$.

Matriz de Incidência

a sua matriz de incidência é uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & e_j = v_p v_q,\ i \neq p, q \\ 1, & e_j = v_i v_k,\ k \neq i \\ 2, & e_j = v_i v_i \end{cases}$$

No caso de digrafos sem laços

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & e_j = v_p v_q,\ i \neq p, q \\ +1, & e_j = v_k v_i \\ -1, & e_j = v_i v_k \end{cases}$$

Grafos Isomorfos

Dois grafos simples G e H dizem-se isomorfos

se existir uma bijecção $\theta : V(G) \to V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ sse $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

Invariantes do isomorfismo

Grafos isomorfos têm:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas;
- os mesmos graus dos vértices;

Grafos Isomorfos

Dois grafos simples G e H dizem-se isomorfos

se existir uma bijecção $\theta : V(G) \to V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ sse $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

Invariantes do isomorfismo

Grafos isomorfos têm:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas;
- os mesmos graus dos vértices;

Grafos Isomorfos

Dois grafos simples G e H dizem-se isomorfos

se existir uma bijecção $\theta : V(G) \to V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ sse $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

Invariantes do isomorfismo

Grafos isomorfos têm:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas;
- os mesmos graus dos vértices;

Grafos Isomorfos

Dois grafos simples G e H dizem-se isomorfos

se existir uma bijecção $\theta : V(G) \to V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ sse $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

Invariantes do isomorfismo

Grafos isomorfos têm:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas;
- os mesmos graus dos vértices;

Grafos Isomorfos

Dois grafos simples G e H dizem-se isomorfos

se existir uma bijecção $\theta : V(G) \to V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ sse $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

Invariantes do isomorfismo

Grafos isomorfos têm:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas;
- os mesmos graus dos vértices;

Grafos Isomorfos

Dois grafos simples G e H dizem-se isomorfos

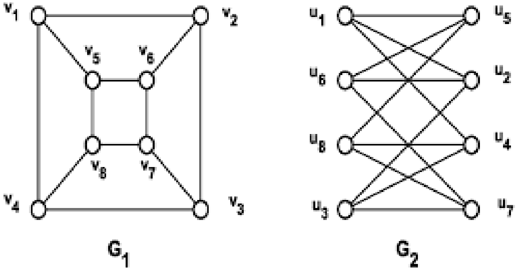
se existir uma bijecção $\theta : V(G) \to V(H)$, tal que $uv \in E(G)$ sse $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.

Invariantes do isomorfismo

Grafos isomorfos têm:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas;
- os mesmos graus dos vértices;

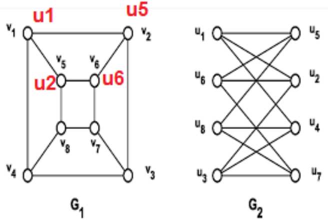
Grafos Isomorfos



	G_1	G_2
$\|V\|$	8	8
$\|E\|$	12	12
Graus	3,3,3,3,3,3,3,3	3,3,3,3,3,3,3,3

Grafos Isomorfos

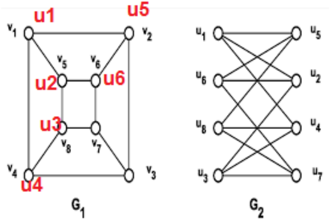
Um isomorfismo entre G_1 e G_2:



- $\theta(v_1) = u_1$; $\theta(v_2) = u_5$
- $\theta(v_5) = u_2$; $\theta(v_6) = u_6$

Grafos Isomorfos

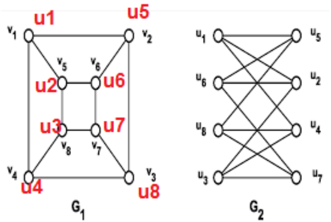
Um isomorfismo entre G_1 e G_2:



- $\theta(v_1) = u_1$; $\theta(v_2) = u_5$ $\theta(v_5) = u_2$; $\theta(v_6) = u_6$
- $\theta(v_8) = u_3$; $\theta(v_4) = u_4$

Grafos Isomorfos

Um isomorfismo entre G_1 e G_2:

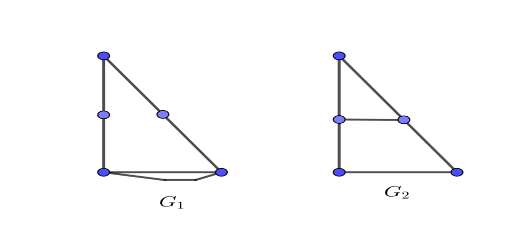


- $\theta(v_1) = u_1$; $\theta(v_2) = u_5$; $\theta(v_5) = u_2$; $\theta(v_6) = u_6$; $\theta(v_8) = u_3$;
- $\theta(v_4) = u_4$; $\theta(v_7) = u_7$; $\theta(v_3) = u_8$

Grafos Isomorfos

Observação: Os invariantes do isomorfismos são condições necessárias mas não suficientes.

contraexemplo: G_1 e G_2 não isomorfos.



	G_1	G_2
$\|V\|$	5	5
$\|E\|$	6	6
Graus	2,2,2,3,3	2,3,3,2,2

Perguntas?